Цепочка Вольтерра

Цепочка Вольтерра это дифференциально-разностное уравнение (одна независимая переменная дискретна, вторая непрерывна):

$$\frac{du_n}{dt} = u_n(u_{n+1} - u_{n-1}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Покажем, что оно определяет некоторую дискретизацию уравнения КдФ. Потребуем, чтобы решение имело вид

$$u_n(t) = a + bh^2 U(X,T), \quad X = nh + cht, \quad T = dh^3 t, \tag{2}$$

где U — гладкая функция, h — шаг по решетке (малый параметр), a, b, c, d — некоторые константы, которые мы сейчас подберем. Тогда

$$du_n/dt = bch^3 U_X + bdh^5 U_T,$$

$$u_{n\pm1} = a + bh^2\Big(U \pm hU_X + \frac{h^2}{2}U_{XX} \pm \frac{h^3}{6}U_{XXX} + \frac{h^4}{24}U_{XXXX} + O(h^5)\Big).$$

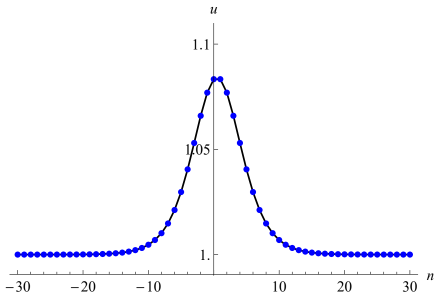
Подставляя в уравнение и сокращая на bh^3, получим

$$\begin{aligned} cU_X + dh^2 U_T &= (a + bh^2 U)\Big(2U_X + \frac{h^2}{3}U_{XXX} + O(h^4)\Big) \\ &= 2aU_X + \frac{h^2}{3}(aU_{XXX} + 6bUU_X) + O(h^4). \end{aligned}$$

Легко видеть, что при выборе $c = 2a$, $d = a/3$, $b = a$ для $U(X,T)$ получается уравнение КдФ с точностью до членов порядка $O(h^2)$.

Позже мы покажем, что цепочка (1) интегрируема: у неё есть бесконечная последовательность законов сохранения и высших симметрий, представление Лакса и другие полезные свойства, причём многие конструкции напоминают соответствующие места из теории КдФ. Явная формула для 1-солитонного решения с единичной асимптотикой имеет вид

$$u_n(t) = \frac{w_{n+1}(t)w_{n-2}(t)}{w_n(t)w_{n-1}(t)}, \quad w_n(t) = 1 + ca^n \exp((a - a^{-1})t), \quad a, c = \mathrm{const}\,.$$



Имеется также и формула для N-солитонного решения; как и в случае КдФ, оно выражается через некоторый определитель порядка N. Пока что ограничимся численными экспериментами. Чтобы посмотреть, как устроено многосолитонное решение цепочки, возьмем достаточно большой период по n и зададим начальные условия какой-нибудь плавной функцией, выходящей на ненулевую константу (важно, чтобы она не меняла знак). Получившуюся задачу Коши для конечномерной динамической системы решим численно.

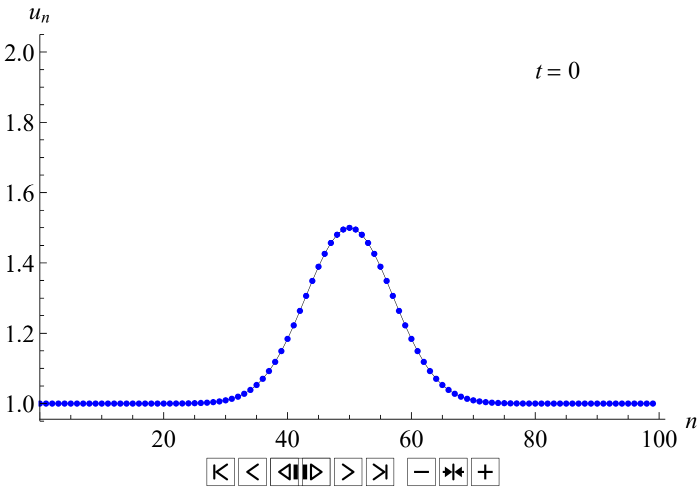


Рис. 1. Начальное условие:
$u_n(0) = 1 + 0.5\exp(-0.01(n-50)^2)$, $n = 0..99$.

Как видим, решение ведёт себя очень похоже на решения КдФ, что и следовало ожидать, с учётом непрерывного предела. Возникает несколько солитонов (их число зависит от начальной кривой), распространяющихся с разной скоростью и, благодаря условию периодичности, всё время догоняющих друг друга. Строго говоря, это не «чистое» многосолитонное решение, но достаточно хорошее приближение к нему.

Между цепочкой Вольтерра и КдФ есть и отличия. Заметим, что цепочка допускает стационарное решение вида $u_{2n} = a$, $u_{2n+1} = b$ с разными постоянными a и b. Если немного возмутить его, отдельно для чётных и нечётных переменных, то эти переменные так и останутся разделёнными. Конечно, в уравнении КдФ такое невозможно. Вот пример такого решения. Его поведение кажется более сложным и счёт не такой устойчивый; если сильно увеличить амплитуду возмущений, то в решении могут возникнуть особенности.

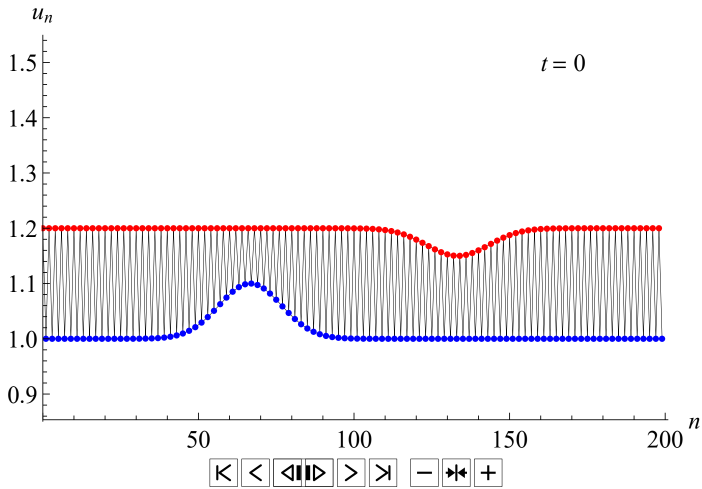


Рис. 2. Решение с разделёнными чётными и нечётными номерами.

Название цепочки (1) связано с работой [1], в которой были введены системы общего вида

$$du_n/dt = u_n \sum_{k=1}^{N} a_{nk} u_k, \quad n = 1, \dots, N$$

для описания динамики биологических популяций; при этом знаки коэффициентов a_{nk} отвечают за то, кто кем питается. Аналогичные системы применяются в химической кинетике (u_n обозначает концентрацию одного из реагентов). В общем случае, при произвольных коэффициентах, это неинтегрируемая система. Цепочка (1) это очень специальный случай, отвечающий ситуации, когда у каждого вида имеется ровно один источник пищи, причем все коэффициенты усвояемости одинаковые. Конечно, в природе такое трудно представить. В конце 60-х цепочка (1) была выведена при описании ионных волн в плазме. Её интегрируемость, в смысле теории солитонов, была обнаружена в работах [2, 3, 4]. С тех пор она является одной из наиболее популярных интегрируемых моделей.

[1] V. Volterra. Lecons sur la theorie mathematique de la luttre pour la vie. Paris: Gauthier-Villars, 1931.

[2] V.E. Zakharov, S.L. Musher, A.M. Rubenchik. О нелинейной стадии параметрического возбуждения волн в плазме. *JETP Lett.* **19:5** (1974) 249–253.

[3] С.В. Манаков. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах *JETP* **67** (1974) 543–555.

[4] M. Kac, P. van Moerbeke. On an explicitly soluble system of nonlinear differential equations related to certain Toda lattices. *Adv. in Math.* ***16:2*** (1975) 160–169.